

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 8. 02. 2026

### BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX - a

**Problema 1.** a) Arătați că pentru orice numere reale  $a, b$  și  $c$ ,  $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc)$ .

b) Fie  $a, b, c$  numere reale pozitive cu suma 3. Arătați că:

$$\frac{a}{2b+3} + \frac{b}{2c+3} + \frac{c}{2a+3} \geq \frac{3}{5}.$$

**Barem de corectare.**

a) Se arată că  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ , de unde  $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc)$ . **(8p)**

b) Din inegalitatea lui Titu Andreescu, avem:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2b+3} + \frac{b}{2c+3} + \frac{c}{2a+3} &= \frac{a^2}{2ab+3a} + \frac{b^2}{2cb+3b} + \frac{c^2}{2ac+3c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+ac+bc)+3(a+b+c)} \\ &= \frac{9}{2(ab+ac+bc)+9} \geq \frac{9}{\frac{2}{3}(a+b+c)^2+9} = \frac{3}{5}. \end{aligned} \quad \textbf{(6.5p)}$$

**Problema 2.** Fie triunghiul  $ABC$  și punctele  $E \in (AB)$  și  $F \in (AC)$ , astfel încât  $\frac{AE}{EB} = \frac{4}{3}$  și

$\frac{FC}{FA} = \frac{1}{4}$ . Dreapta  $EF$  intersectează mediana  $AD$  ( $D \in (BC)$ ) în punctul  $G$ . Arătați că  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ .

**Barem de corectare.** Din ipoteză,  $AE = \frac{4}{7}AB$  și  $FC = \frac{1}{5}AC$ . **(4p)**

Dacă notăm  $\frac{AG}{AD} = k$ , atunci  $\overrightarrow{AG} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$  **(3p)**, de unde se obține că

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG} = \left(\frac{k}{2} - \frac{4}{7}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{și} \quad \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}. \quad \textbf{(6p)}$$

Cum  $\overrightarrow{EG}$  și  $\overrightarrow{EF}$  sunt coliniari, rezultă că  $\frac{\frac{k}{2} - \frac{4}{7}}{-\frac{4}{7}} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{4}{5}}$ , adică  $k = \frac{2}{3}$  **(6.5p)**. Așadar,  $AG = \frac{2}{3}AD$ ,

adică  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ . **(3p)**

**Problema 3.** Rezolvați ecuația  $\left\lceil \frac{x-3}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{x-2}{3} \right\rceil$ .

**Notă.**  $\lceil a \rceil$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .

**Barem de corectare.** Din  $\left\lceil \frac{x-3}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{x-2}{3} \right\rceil = k \in \mathbb{Z}$ , se obține că

$$x \in [2k+3, 2k+5) \cap [3k+2, 3k+5). \quad (6.5p)$$

Deoarece  $[2k+3, 2k+5) \cap [3k+2, 3k+5) \neq \emptyset$ , dacă și numai dacă  $k \in \{-1, 0, 1, 2\}$  (8p), se obține că  $x \in [1, 2) \cup [3, 5) \cup [5, 7) \cup [8, 9) = [1, 2) \cup [3, 7) \cup [8, 9)$  (8p)

**Problema 4.** Arătați că  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) < 3$ , pentru orice număr natural  $n \geq 1$ .

**Barem de corectare.** Se demonstrează prin inducție matematică că  $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n}$ . (5p)

Inegalitatea este verificată pentru  $n = 1$  (2p). Presupunem acum afirmația adevărată pentru un număr natural  $m \geq 1$  și demonstrăm că e adevărată și pentru  $m+1$ . Așadar, dacă  $P_m = \prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{m}$ , atunci

$$P_{m+1} = \prod_{k=1}^{m+1} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) = P_m \cdot \left(1 + \frac{1}{(m+1)^3}\right) \leq \left(3 - \frac{1}{m}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{(m+1)^3}\right). \quad (8.5p)$$

Dar, cum  $\left(1 + \frac{1}{(m+1)^3}\right) \left(3 - \frac{1}{m}\right) \leq 3 - \frac{1}{m+1} \Leftrightarrow m^2 - m + 2 \geq 0$ , rezultă că  $P_{m+1} \leq 3 - \frac{1}{m+1}$ . (6p)

Așadar,  $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n} < 3$ , pentru  $n \geq 1$ . (1p)

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

## BAREM DE CORECTARE - Clasa a X - a

**Problema 1.** Fie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , astfel ca  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ .a) Dacă  $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ , calculați  $\frac{1}{z_1^3} + \frac{1}{z_2^3} + \frac{1}{z_3^3}$ .b) Dacă  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$  și  $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ , determinați  $|z_1 + z_2 + z_3|$ .**Barem de corectare.**a) Din ipoteză, rezultă că  $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1$  **(3p)**, de unde

$$\frac{1}{z_1^3} + \frac{1}{z_2^3} + \frac{1}{z_3^3} = 3 \cdot \frac{1}{z_1 z_2 z_3} + \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) \left( \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2} - \frac{1}{z_1 z_2} - \frac{1}{z_1 z_3} - \frac{1}{z_2 z_3} \right) \quad (5p)$$

$$= \frac{3}{z_1 z_2 z_3} + \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) \cdot \left( \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right)^2 - 3 \left( \frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_1 z_3} + \frac{1}{z_2 z_3} \right) \right) \\ = \frac{3}{z_1 z_2 z_3} + \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) \cdot \left( \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right)^2 - 3 \cdot \frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_1 z_2 z_3} \right) = 1. \quad (4p)$$

b) Din ipoteză se obține că  $\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2} = 0$ , de unde  $z_1^2 z_2^2 + z_3^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 = 0$ . **(3p)**Așadar,  $(z_1 + z_2 + z_3)^4 = \left( (z_1 + z_2 + z_3)^2 \right)^2 = 4(z_1 z_2 + z_3 z_2 + z_1 z_3)^2 = 8z_1 z_2 z_3 (z_1 + z_2 + z_3)$  **(4.5p)**, de unde rezultă că  $|z_1 + z_2 + z_3|^4 = 8 \cdot |z_1 + z_2 + z_3|$ , adică  $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$ . **(3p)****Problema 2.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ .a) Arătați că  $f$  nu este injectivă și nici surjectivă;b) Calculați  $f\left(\frac{1}{2026}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2025}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) \cdot \frac{1}{f(2)} \cdot \dots \cdot \frac{1}{f(2026)}$ .**Barem de corectare.** a) Se arată că funcția  $f$  nu este nici injectivă **(4p)** nici surjectivă **(4p)**.b) Din  $f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{f(x)} = 1$  **(9p)**, obținem că produsul cerut are valoarea  $f(1) = \frac{1}{2}$ . **(5.5p)**

**Problema 3.** Arătați că, dacă numerele reale pozitive  $x, y$  și  $z$ , distincte două câte două, satisfac relația

$$\frac{\lg x}{y-z} = \frac{\lg y}{z-x} = \frac{\lg z}{x-y}, \text{ atunci } x^x y^y z^z = 1.$$

**Barem de corectare.** Dacă  $\frac{\lg x}{y-z} = \frac{\lg y}{z-x} = \frac{\lg z}{x-y} = k$ , atunci

$$\lg x = k(y-z), \lg y = k(z-x), \lg z = k(x-y). \quad (8p)$$

Așadar,  $\lg(x^x y^y z^z) = x \lg x + y \lg y + z \lg z = kx(y-z) + ky(z-x) + kz(x-y) = 0$  (11p), de unde se obține că  $x^x y^y z^z = 1$ . (3.5p)

**Problema 4.** Determinați funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $f(0) \neq -1$  și care verifică relația

$$f(x \cdot f(y) + f(x+y)) = y \cdot (f(x) + 1) + f(x),$$

pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Barem de corectare.** Pentru  $x=0$ , obținem că  $f(f(y)) = y(f(0)+1) + f(0)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ . (5p)

Din faptul că  $f(0) \neq -1$ , rezultă că  $f \circ f$  este bijectivă, de unde obținem că  $f$  este injectivă. (5p)

Luând în relația din enunț  $y=0$ , obținem că pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x \cdot f(0) + f(x)) = f(x)$  (5p),

de unde, din injectivitate, rezultă că  $x \cdot f(0) + f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x(1 - f(0))$  (5p). Din

$f(0) = 0$ , rezultă că  $f(x) = x$ . (2.5p)

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

## BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI - a

**Problema 1.** Fie matricele  $C = \begin{pmatrix} 2025 & 1 \\ 2026 & 1 \end{pmatrix}$  și  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ , astfel încât  $AB = C$ . Demonstrați că  $BA - (BA)^{-1} = 2026 \cdot I_2$ .

**Barem de corectare.** Din  $\det(AB) = \det C = -1$ , rezultă că matricele  $A$  și  $BA$  sunt inversabile. **(3p)**

Din  $AB = C \Rightarrow BA = A^{-1}CA \Rightarrow (BA)^{-1} = (A^{-1}CA)^{-1} = A^{-1}C^{-1}A$  **(9p)**, de unde obținem că

$$BA - (BA)^{-1} = A^{-1}CA - A^{-1}C^{-1}A = A^{-1}(C - C^{-1})A = A^{-1}(2026 \cdot I_2)A = 2026 \cdot I_2. \quad \textbf{(10.5p)}$$

**Problema 2.** Presupunând că limita  $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$  există și este finită, calculați valoarea acesteia folosind schimbarea de variabilă  $x = 3t$ .

**Barem de corectare.** Cum  $x \rightarrow 0 \Rightarrow t = \frac{x}{3} \rightarrow 0$  **(3p)**, avem

$$l = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - \sin 3t}{27t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3\sin t + 4\sin^3 t}{27t^3} \quad \textbf{(9p)}$$

$$= \frac{1}{9} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \frac{4}{27} \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^3 = \frac{1}{9}l + \frac{4}{27} \quad \textbf{(8p)}$$

de unde se obține că  $l = \frac{1}{6}$ . **(2.5p)**

**Notă.** Pentru calculul limitei cu ajutorul regulii lui L'Hospital nu se acordă niciun punct.

**Problema 3.** Fie matricea  $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ . Arătați că urma matricei  $A^n$  este  $1 + 2^n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Barem de corectare.** Din Teorema lui Hamilton-Cayley,  $A^2 = \text{tr}A \cdot A - \det A \cdot I_2 = 3A - 2I_2$  **(4p)**,

de unde obținem că  $A^{n+2} = 3A^{n+1} - 2A^n$  și  $\text{tr}(A^{n+2}) = 3 \cdot \text{tr}(A^{n+1}) - 2 \cdot \text{tr}(A^n)$ . **(5p)**

Dacă notăm  $\text{tr}(A^n) = x_n$ , șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este definit de relația de recurență  $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ , cu  $x_0 = \text{tr}(I_2) = 2$  și  $x_1 = \text{tr}(A) = 3$ . Cum ecuația caracteristică  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$  are rădăcinile 1 și 2, termenul general al șirului este de forma  $x_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n$ . **(10p)**

Din  $x_0 = 2$  și  $x_1 = 3$ , se obține că  $\text{tr}(A^n) = x_n = 1 + 2^n$ . **(3.5p)**

---

*Fiecare problemă se punctează de la 0 la 22.5 puncte și se acordă 10 puncte din oficiu  
Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător*

**Problema 4.** Calculați limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( n\pi \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 4n - 5} \right)$ .

**Barem de corectare.** Deoarece funcția sinus este periodică de perioadă principală  $2\pi$ , rezultă că  $n(n+1) \cdot \pi$  este o perioadă a funcției, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . **(6.5p)** Așadar,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( n\pi \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 4n - 5} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( n\pi \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 4n - 5} - n(n+1)\pi \right) = \quad \textbf{(6p)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( \frac{\left( n^3 + 3n^2 + 4n - 5 - (n+1)^3 \right) \cdot n\pi}{\sqrt[3]{\left( n^3 + 3n^2 + 4n - 5 \right)^2} + \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 4n - 5} (n+1) + (n+1)^2} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \textbf{(10p)}$$

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8. 02. 2026

## BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII - a

**Problema 1.** Să se calculeze:

a) 
$$\int \frac{dx}{x \cdot \left( 1 + x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x \cdot \dots \sqrt[2026]{x}}} \right)}, \quad x \in (0, +\infty);$$

b) 
$$\int \frac{dx}{x^4 + 3x^2 + 1} \quad \text{și} \quad \int \frac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 1} dx, \quad x \in (0, +\infty)$$

**Barem de corectare.** a) Dacă notăm  $\alpha = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{2026!}$ , atunci

$$\int \frac{dx}{x(1+x^\alpha)} = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha} \right) dx = \ln x - \frac{1}{\alpha} \ln(1+x^\alpha) + c. \quad (10.5p)$$

b) Notăm cu  $I$  și  $J$  primitivele cerute. Deoarece

$$J + I = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3} dx = \int \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)'}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 5} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{5}} + c \quad (4p)$$

$$J - I = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3} dx = \int \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)'}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} \left(x + \frac{1}{x}\right) + c \quad (4p)$$

se obțin

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} \left(x + \frac{1}{x}\right) \right) + c, \quad J = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{5}} + \operatorname{arctg} \left(x + \frac{1}{x}\right) \right) + c. \quad (4p)$$

**Problema 2.** Fie  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție care admite primitive și care verifică relația:

$$f(x) \cdot \sin x - f(\pi - x) = \cos^2 x, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

Să se determine funcția  $f$  și primitivele ei.

**Barem de corectare.** Din relația dată, prin substituția  $x \leftarrow \pi - x$ , respectiv prin înmulțire cu  $\sin x$ , obținem

$$f(\pi - x) \cdot \sin x - f(x) = \cos^2 x \quad \text{și} \quad f(x) \cdot \sin^2 x - f(\pi - x) \cdot \sin x = \cos^2 x \cdot \sin x \quad (8p)$$

de unde, prin adunare avem că  $-f(x) \cdot \cos^2 x = \cos^2 x \cdot (1 + \sin x)$ ,  $\forall x \in [0, \pi]$ . (6p)

Așadar,  $f(x) = -1 - \sin x$ , pentru  $x \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ . Dar, cum funcția  $f$  admite primitive, ea are

proprietatea lui Darboux. În consecință  $f(x) = -1 - \sin x$  și  $F(x) = -x + \cos x + c$ , pentru orice  $x \in [0, \pi]$ . (8.5p)

**Problema 3.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $H$  o submulțime proprie a lui  $G$  ( $H \neq \emptyset$ ,  $H \neq G$ ), cu proprietatea că pentru orice elemente  $x \in H$  și  $y \in G - H$ , avem  $x \cdot y \in G - H$ . Să se arate că  $H$  este un subgrup al lui  $G$ .

**Barem de corectare.** Din ipoteză, mulțimile  $H$  și  $G - H$  sunt nevide.

Arătăm mai întâi că elementul neutru  $e$  este în  $H$ . Într-adevăr, în caz contrar, dacă  $e \notin H$ , pentru un element  $x \in H$ , din ipoteză ar rezulta că  $x = x \cdot e \in G - H$ . (6p)

Fie  $x \in H$  și inversul său  $x^{-1} \in G$ . Dacă  $x^{-1} \in G - H$ , atunci se ajunge la contradicția  $e = xx^{-1} \in G - H$ . Așadar,  $x^{-1} \in H$ . (6.5p)

Pentru  $x, y \in H$ , dacă  $xy \in G - H$ , atunci se obține că  $y = x^{-1} \cdot (xy) \in G - H$ , ceea ce contrazice ipoteza  $y \in H$ . Așadar,  $xy \in H$ . (7p)

Din cele de mai sus, rezultă că  $H$  este subgrup al lui  $G$ . (3p)

**Problema 4.** Pe mulțimea  $G = [0, 1]$  se definește legea de compoziție  $x * y = \{x + y\}$ .

a) Să se arate că  $(G, *)$  este un grup abelian;

b) Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , grupul  $(G, *)$  are un subgrup izomorf cu  $(\mathbb{Z}_n, +)$ .

**Notă.**  $\{a\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $a$ .

**Barem de corectare.** a) Demonstrarea faptului că  $(G, *)$  este grup abelian (16.5p)

( $\{x + y\} \in G$  (2p), comutativitatea (2p), asociativitatea (4.5p), existența elementului neutru (4p), simetrizabilitatea (4p) )

b) De exemplu, se demonstrează că mulțimea  $H_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$  este un subgrup ciclic al lui

$G$  și că  $H_n \cong \mathbb{Z}_n$ . (6p)